

Přírodovědecká fakulta University Palackého v Olomouci
katedra jemné mechaniky a optiky

Aleš Z U Z A Ň Á K

UŽITÍ MATIC V GAUSSOVĚ OPTICE

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Marie Č E C H O V Á
odb. asistentka

Práce odevzdána dne: 15.6.1972
Katedra jemné mechaniky a optiky
přírodovědecké fakulty
UNIVERSITY PALACKÉHO
OLOMOUC Gottwaldova 15
červen
1972

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením odb. as. RNDr. Marie Čechové a za použití uvedené literatury.

Současně děkuji své vedoucí za ochotné vedení a vežkerý čas, který mi věnovala.

Olomouc, červen 1972

Aleš ZUZAŇÁK

O. Úvod

Geometrická optika má velký význam nejen proto, že vysvětluje jednoduchým způsobem řadu jevů, ale především proto, že poskytuje podklady pro konstrukci optických přístrojů.

Vychází z těchto předpokladů:

- a/ V homogenním a izotropním prostředí, tj. v takovém, kde optické vlastnosti jsou stejné v každém místě a v každém směru tohoto prostředí, se šíří světlo přímočaře ve směru světelných paprsků.
- b/ Ve světelném toku jsou jednotlivé svazky na sobě nezávislé a šíří se tak, jako kdyby ostatních svazků nebylo.
- c/ Od každého svítícího bodu, který považujeme za geometrický bod, vychází paprsky všemi směry a tvoří tzv. homocentrický svazek paprsků.
- d/ Na rozhraní dvou homogenních a izotropních prostředí platí pro světelné paprsky zákon lomu a odrazu.

Jedním ze základních problémů geometrické optiky je problém optického zobrazení. Je třeba, aby optické soustavy přístrojů poskytovaly obrazy nejlepší jakosti. Žádáme, aby se body zobrazovaly v body, přímky v přímky a roviny v roviny. Jestliže soustava splňuje uvedené podmínky, nazývá se fyzikálně dokonalá.

Optická soustava je zpravidla řada kulových /případně rovinných/ ploch, jejichž středy leží na jedné přímce zvané optická osa soustavy.

Optická soustava zprostředuje prakticky fyzikálně dokonalé zobrazení jen u velmi malého plošného elementu v blízkosti optické osy velmi úzkými paprskový-

mi svazky, jejichž jednotlivé paprsky svírají s optickou osou a s kolmicemi dopadu na jednotlivé plochy optické soustavy úhly menší než 2° . Prostor, v němž tyto zobrazující svazky probíhají, se nazývá prostor paraxiální nebo též prostor 1. řádu nebo Gaussův prostor podle autora, který jeho vlastnosti důkladně prozkoumal.

Úkolem této diplomové práce je ukázat možnost výstavby Gaussovy optiky pomocí moderního matematického aparátu - matic a dále užít tohoto aparátu ke studiu běžných optických soustav. Dále ukážeme, že maticeová reprezentace Gaussova prostoru udělá analýzy optických soustav jednodušší než při řešení metodami geometrie, užívaných u "klasické" geometrické optiky.

Práce je rozdělena do tří částí. První část obsahuje základní pojmy a paraxiální vlastnosti některých optických soustav, které jsou diskutovány klasickými metodami geometrické optiky. Tato část je uvedena proto, abychom se blíže seznámili s problémy a vztahy Gaussova prostoru a také mohli porovnat klasický způsob řešení s maticovým řešením.

V druhé části je rozebrán prostor prvního řádu pomocí matic. V třetí části je pak aplikován vybudovaný maticový aparát na řešení některých optických soustav.

1. Klasický způsob řešení optických soustav v paraxiálním prostoru

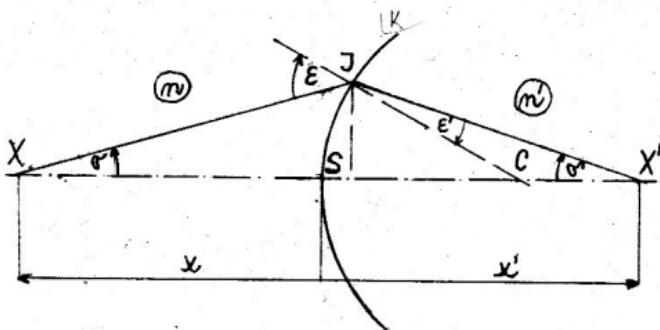
V této části uvedeme přehled základních pojmu a vztahů z Gaussovy optiky.

1.1 Zobrazování kulovou plochou

Na obrázku [1.1] značí K kulovou plochu oddělující dvě homogenní a izotropní prostředí o indexech lomu n a n' . Bod C je středem křivosti plochy, S vrcholem plochy, přímka SC je optickou osou, R poloměr křivosti, X' je obraz bodu X .

Dopadající paprsek je určen úhlem ϵ a sečnou vzdálostí $x = \bar{XS}$, lomený paprsek je obdobně určen úhlem a sečnou vzdáleností $x' = \bar{S}X'$. Úhel dopadu je označen ϵ , úhel lomu ϵ' .

Obr. [1.1]



Pro znaménka veličin zavádíme tuto dohodu:

- a/ Předpokládá se, že světlo přichází od levé strany k pravé; tento směr se považuje za kladný.
- b/ Úsečky měřené ve směru /protisměru/ šíření světla od zvoleného bodu jsou kladné /záporné/.
- c/ Poloměr křivosti R je kladný /záporný/, je-li střed křivosti C vpravo /vlevo/ od vrcholu plochy S .
- d/ Úhel σ resp. σ' měříme od optické osy k paprsku; ve směru /protisměru/ hodinových ručiček je úhel kladný /záporný/.
- e/ Úhel ξ resp. ξ' měříme od paprsku ke kolmici dopadu; ve směru /protisměru/ hodinových ručiček je kladný /záporný/.

Z obr. [1.1] použitím sinové věty a zákona lomu lze z trojúhelníků XJC a CJX' odvodit vztahy:

$$\sin \xi = \frac{x-R}{R} \sin \sigma$$

$$\sin \xi' = \frac{m'}{m} \sin \sigma$$

$$\sigma' = \sigma + \xi - \xi'$$

$$x' = R + \frac{R \sin \xi'}{\sin \sigma'}$$

Omezíme-li se na úhly v intervalu $0 - 2^\circ$, pak lze s přesností jednotky pátého desetinného místa psát:

$$\xi = \frac{x-R}{R} \sigma$$

$$\xi' = \frac{m'}{m} \xi$$

$$\sigma' = \sigma + \xi - \xi'$$

$$x' = R + \frac{R \xi'}{\sigma'}$$

Využením úhlů dostaneme po úpravě zobrazovací rovnici pro kulovou plochu v paraxiálním prostoru:

$$\frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = \frac{n'-n}{R} \quad /1.1/$$

1.2 Zobrazení centrovanou soustavou j. kulových ploch

Svazek paraxiálních paprsků o středu x_1 se přemění soustavou j. ploch ve svazek o středu x'_j ; tyto dva body se nazývají sdruženými body optické soustavy, obr.[1.2]. Jde-li o určení polohy sdružených bodů, aplikujeme /1.1/ pro první plochu

$$\frac{n'_1}{x'_1} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n'_1-n_1}{R_1}$$

Pro přechod k druhé ploše platí: $x_2 = x'_1 - d_1$, $n_2 = n'_1$.

Pro druhou plochu platí:

$$\frac{n'_2}{x'_2} - \frac{n_2}{x_2} = \frac{n'_2-n_2}{R_2}$$

Přechod k třetí ploše je: $x_3 = x'_2 - d_2$, $n_3 = n'_2$, atd.,

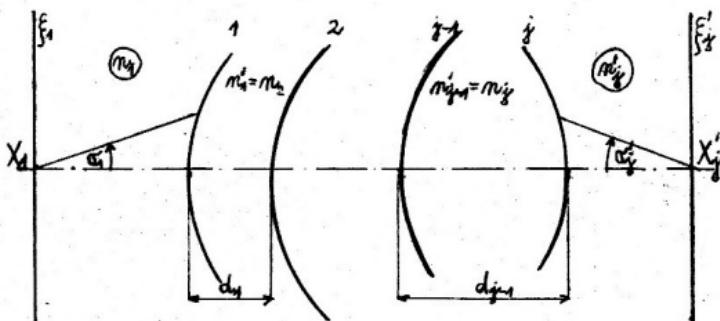
až konečně pro j-tou plochu máme:

$$x_j = x'_{j-1} - d_{j-1}$$

$$\frac{n'_j}{x'_j} = \frac{n_j}{x_j} = \frac{n'_j - n_j}{R_j}$$

Prostředí o indexu lomu n_j / n'_j se nazývá předmětovým /obrazovým/ prostředím soustavy.

Obr. [1.2]



1.2.1 Zvětšení

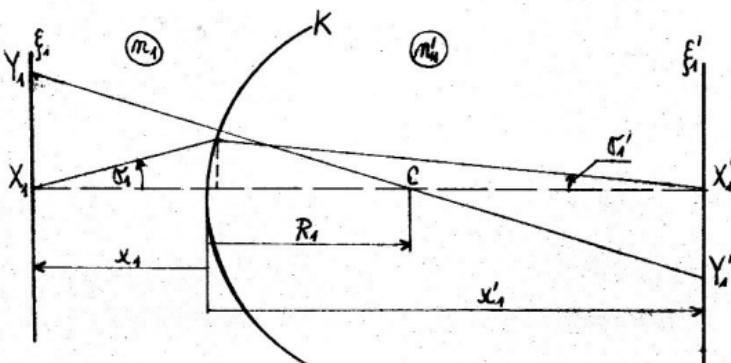
Podíl dvou sdružených veličin optické soustavy nazýváme zvětšením. Význam mají tyto tři případy:
podíl úseček kolmých k ose /příčné zvětšení β /, podíl úhlů, které svírají sdružené paprsky s optickou

osou /úhlové zvětšení β_1 , podíl sdružených úseček v ose /osové zvětšení d_1 .

a/ Příčné zvětšení

Zvětšení pro první plochu máme $\beta_1 = \frac{y'_1}{y_1}$, kde y'_1 je obrazem úsečky y_1 , viz obr. [1.3].

Obr. [1.3]



$$y_1 = \overline{x_1 y_1}, \quad y'_1 = \overline{x'_1 y'_1}$$

Z obrázku plyne:

$$\frac{y'_1}{y_1} = \frac{x'_1 - R_1}{x_1 - R_1}$$

a užitím /1.1/ po úpravě máme:

$$\beta_1 = \frac{n_1}{n'_1} \cdot \frac{x'_1}{x_1}.$$

Zvětšení pro druhou plochu

$$\beta_2 = \frac{y'_2}{y_2} = \frac{n_2}{n'_2} \frac{x'_2}{x_2}$$

až pro j-tou plochu je

$$\beta_j = \frac{y'_j}{y_j} = \frac{n_j}{n'_j} \frac{x'_j}{x_j} .$$

Poněvadž $y_2 = y'_1$, $y_3 = y'_2$ atd.

$n_2 = n'_1$, $n_3 = n'_2$ atd.

obdržíme násobením

$$\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_j = \frac{y'_j}{y_1} = \frac{n_1 x'_1 x'_2 \dots x'_j}{n'_j x_1 x_2 \dots x_j} /1.2/$$

b/ Úhlové zvětšení

Pro první plochu plyne z obrázku [1.3]

$$\beta_1 = \frac{\tilde{v}'_1}{\tilde{v}_1} = \frac{x_1}{x'_1}$$

pro druhou plochu

$$\beta_2 = \frac{\tilde{v}'_2}{\tilde{v}_2} = \frac{x_2}{x'_2}$$

pro j-tou plochu

$$f_j = \frac{\tilde{v}_j^i}{\tilde{v}_j} = \frac{x_j}{x'_j}$$

Poněvadž $\tilde{v}_2 = \tilde{v}_1'$, $\tilde{v}_3 = \tilde{v}_2'$ atd.

obdržíme násobením

$$f = f_1 f_2 \dots f_j = \frac{\tilde{v}'_j}{\tilde{v}_1} = \frac{x_1 x_2 \dots x_j}{x'_1 x'_2 \dots x'_j}$$

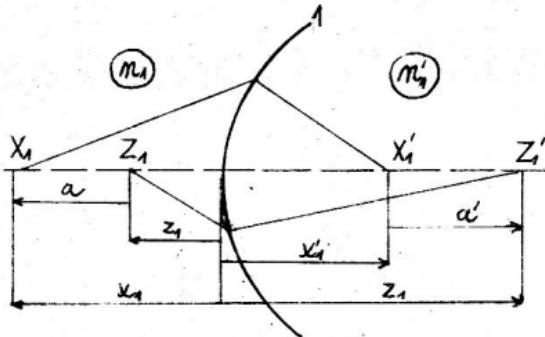
nebo s ohledem na /1.2/ lze psát

$$f = \frac{n_1}{n'_j} \frac{1}{\beta} \quad /1.3/$$

c/ Osové zvětšení

Pro první plochu dostaneme z obrázku [1.4] :

Obr. [1.4]



$$d_1 = \frac{z'_1 - x'_1}{z_1 - x_1} = \frac{a'}{a}$$

Dosazením ze vztahu /1.1/ za z'_1 a x'_1 máme:

$$d_1 = \frac{n_1}{n'_1} \frac{x'_1}{x_1} \frac{z'_1}{z_1}$$

Pro druhou plochu

$$d_2 = \frac{n_2}{n'_2} \frac{x'_2}{x_2} \frac{z'_2}{z_2}$$

pro j-tou plochu

$$d_j = \frac{n_j}{n'_j} \frac{x'_j}{x_j} \frac{z'_j}{z_j}$$

Poněvadž $a_2 = a'_1$, $a_3 = a'_2$ atd.

$n_2 = n'_1$, $n_3 = n'_2$ atd.

obdržíme násobením

$$\alpha = d_1 d_2 \dots d_j = \frac{a'_j}{a_1} \frac{n_1}{n'_j} \frac{x'_1 x'_2 \dots x'_j}{x_1 x_2 \dots x_j} \frac{z'_1 z'_2 \dots z'_j}{z_1 z_2 \dots z_j}$$

o značíme-li

$$\beta_x = \frac{n_1}{n'_j} \frac{x'_1 x'_2 \dots x'_j}{x_1 x_2 \dots x_j}$$

$$\beta_z = \frac{n_1}{n'_j} \frac{z'_1 z'_2 \dots z'_j}{z_1 z_2 \dots z_j}$$

dostaneme

$$\mathcal{L} = \frac{n'_j}{n_1} \beta_x \beta_z .$$

Jsou-li úsečky na ose velmi malé $\beta_x = \beta_z = \beta$, předešlý vzorec nabývá tvaru

$$\mathcal{L} = \frac{n'_j}{n_1} \beta^2 \quad /1.4/$$

1.2.2 Základní body optické soustavy

Pro charakteristiku optické soustavy jsou důležité dvojice sdružených bodů, v nichž zvětšení nabývají význačných hodnot, tj. $0, \infty, \pm 1$.

Praktický význam mají tyto dvojice:

$\beta = 0$: předmětový bod v nekonečnu - obrazové ohnisko F' ,

$\beta \rightarrow \infty$: předmětové ohnisko F - obrazový bod v nekonečnu,

$\beta = 1$: hlavní body P, P' ,

$\beta = -1$: uzlové body N, N' .

Uzlové body splývají s hlavními body, jestliže krajní prostředí optické soustavy mají stejný index lomu

$n'_j = n_1$, jak je patrné ze vztahu /1.3/.

Ohniska, hlavní a uzlové body se nazývají základní body optické soustavy; roviny jdoucí těmito body kolmo k optické ose soustavy se nazývají roviny ohniskové, hlavní a uzlové.

Z definice základních bodů plynou tato pravidla:

- a/ Paprsek vstupující do soustavy rovnoběžně s optickou osou prochází v obrazovém prostoru obrazovým ohniskem F' .

- b/ Paprsek jdoucí předmětovým ohniskem F vychází ze soustavy rovnoběžně s osou.
- c/ Sáružené paprsky protínají odpovídající hlavní roviny ve stejné vzdálenosti od osy.
- d/ Sáružené paprsky procházející uzlovými body jdou vzájemně rovnoběžně.

1.2.3 Ohniskové vzdálenosti optické soustavy

Vzdálenost předmětového resp. obrazového hlavního bodu od předmětového resp. obrazového ohniska nazýváme předmětovou resp. obrazovou ohniskovou vzdáleností soustavy a značíme ji f resp. f' , tedy

$$f = PF, \quad f' = P'F' .$$

Protože odvození f a f' je dosti rozsáhlé, uvedeme přímo výsledky.

Pro ohniskovou vzdálenost platí:

$$f' = \frac{x_1'x_2' \dots x_j'}{x_2x_3 \dots x_j} \quad /1.5/$$

$$a \quad f' = -\frac{n'_j}{n_1} f . \quad /1.6/$$

$$\text{Veličina } \gamma = -\frac{n_1}{f} = \frac{n'_j}{f'} \quad /1.7/$$

se nazývá optická mohutnost nebo lámavost optické soustavy.

1.2.4 Zobrazovací rovnice

a/ Zobrazovací rovnice vztažená na ohniska - rovnice Newtonova.

Je-li q vzdálenost předmětového ohniska od předmětového bodu X_1 a q' vzdálenost obrazového ohniska od obrazového bodu X'_j , a f , f' ohniskové vzdálenosti optické soustavy, pak vztah mezi sdrůženými body X_1 , X'_j , lze snadno určit pomocí Newtonovy zobrazovací rovnice:

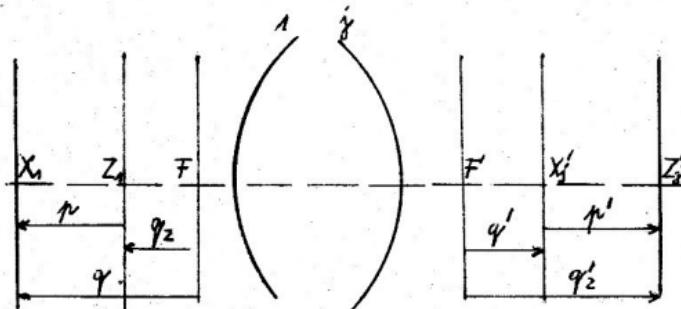
$$gg' = ff' \quad /1.8/$$

$$\text{Pro příčné zvětšení platí: } \beta = - \frac{f}{q} = - \frac{q'}{f'} \quad /1.9/$$

b/ Zobrazovací rovnice vztažená na libovolnou dvojici sdrůžených bodů.

V obrázku [1.5] budíž Z_1 , Z'_j dvojice sdrůžených bodů, v nichž je příčné zvětšení β_z . Vzhledem k témuž bodům určujeme polohu bodů X_1 , X'_j a příslušné vzdálenosti značíme p , p' .

Obr. [1.5]



Označme

$$p = \overline{z_1 x_1}, p' = \overline{z'_j x_j}$$

$$q_z = \overline{F z_1}, q'_z = \overline{F' z'_j}$$

$$q = q_z + p, q' = q'_z + p'$$

Dosazením do /1.8/ po úpravách obdržíme

$$\frac{n'_j}{p'} \beta_z - \frac{n_1}{p} \frac{1}{\beta_z} = \frac{n'_j}{f'} \quad /1.10/$$

a pro příčné zvětšení plyne:

$$\beta = \frac{n_1}{n'_j} \frac{p'}{p} \frac{1}{\beta_z} \quad /1.11/$$

V praxi je důležitý případ, kdy z_1, z'_j jsou hlavní body, tj. $\beta_z = 1$, pak vztah /1.9/ nabývá tvaru:

$$\frac{n'_j}{p'} - \frac{n_1}{p} = \frac{n'_j}{f'} \quad /1.12/$$

$$\beta = \frac{n_1}{n'_j} \frac{p'}{p}$$

Tyto rovnice jsou formálně obdobné jako pro jednu lámovou plochu.

1.2.5 Tlustá čočka

V případě tlusté čočky ve vzduchu se jedná o dvě lámové plochy o poloměrech R_1 , R_2 , vzdálené od sebe o d , kde $n_1 = n'_1 = 1$, $n'_1 = n_2 = n$ /sklo/.

a/ Stanovení poloh ohnisek

Vyjdeme ze zobrazovací rovnice /1.1/; pro polohu obrazového ohniska položíme $x_1 \rightarrow \infty$ a pro polohu předmětového ohniska $x'_2 \rightarrow \infty$.

V prvním případě nabývá rovnice /1.1/ tvaru:

$$\frac{n}{x'_1} = \frac{n-1}{R_1}$$

$$x_2 = x'_1 - d$$

$$\frac{1}{x'_2} - \frac{n}{x_2} = \frac{1-n}{R_2}$$

přijmeme
neutrální sklo
relativní vzdálenost
 $+z' = 1$ $x'_1 = x_2$

Odtud úpravou dostaneme:

$$x'_2 = x'(F') = \frac{R_2[nR_1 - (n-1)d]}{(n-1)[n(R_2-R_1) + (n-1)d]} \quad /1.13/$$

V druhém případě máme:

$$\frac{n}{x'_1} - \frac{1}{x_1} = \frac{n-1}{R_1}$$

$$x_2 = x'_1 - d$$

$$\frac{n}{x_2} = \frac{n-1}{R_2}$$

a odtud

$$x_1 = x(F) = - \frac{R_1 [n R_2 + (n-1) d]}{(n-1)[n(R_2 - R_1) + (n-1) d]} \quad /1.14/$$

b/ Ohniskové vzdálenosti

Platí $f' = \frac{x'_1 x'_2}{x_2}$, $f = -f'$

Dosadíme-li za x'_1 , x'_2 , x_2 , dostaneme:

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{(n-1)^2 d}{n R_1 R_2} \quad /1.15/$$

Použitím /1.13/ lze /1.12/ napsat přehledněji:

$$\begin{aligned} x(F) &= -f' \left(1 + \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_2} \right) \\ x'(F') &= f' \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_1} \right) \end{aligned} \quad /1.16/$$

c/ Poloha hlavních bodů P, P'

$$\begin{aligned} x(P) &= x(F) - f = -f' \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_2} \\ x'(P') &= x'(F') - f' = -f' \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_1} \end{aligned} \quad /1.17/$$

d/ Příčné zvětšení

Pro příčné zvětšení platí: $\beta = \frac{x'_1 x'_2}{x_1 x_2}$

Dosazením za x'_1 , x'_2 , x_1 , x_2 po úpravě vychází:

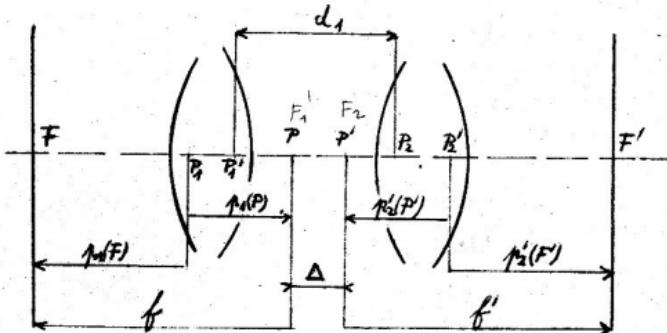
$$\beta = \frac{\frac{1}{f} + 1 + \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_2}}{\frac{x_1}{x_2}} \quad /1.18/$$

1.2.6 Zobrazení soustavou dvou čoček

Mějme případ dvou čoček ve vzduchu obr. [1.6]

o ohniskových vzdálenostech f'_1 , f'_2 a o společné ose.
Vzájemná poloha je určena - vzdáleností $d_1 = \overline{P'_1 P_2}$,
kde P'_1 je obrazový hlavní bod 1. čočky a P_2 je před-
mětový hlavní bod 2. čočky. K danému bodu X_1 hledáme
bod sdržený pomocí zobrazovací rovnice /1.10/:

Obr. [1.6]



$$\frac{1}{P'_1} - \frac{1}{P_1} = \frac{1}{f'_1} \text{ a odtud } P'_1 = \frac{f'_1 P_1}{f'_1 + p'_1}$$

Přechod k druhé čočce je $p_2 = p'_1 - d_1$

$$\frac{1}{P'_2} - \frac{1}{P_2} = \frac{1}{f'_2} \text{ a odtud } P'_2 = \frac{f'_2 P_2}{f'_2 + p'_2}$$

Pro ohniskovou vzdálenost danou tvarem $f' = -f = \frac{P'_1 P'_2}{P_2}$ máme po úpravě známý tvar:

$$f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - d_1} \quad /1.19/$$

Polohu obrazového ohniska F' dostaneme pro $P_1 \rightarrow \infty$, takže

$$\lim_{P_1 \rightarrow \infty} P'_2 = P'_2(F') = \frac{(f'_1 - d_1) f'_2}{f'_1 + f'_2 - d_1} \quad /1.20/$$

Obdobně poloha F je dána:

$$P_1(F) = \frac{(f'_2 - d_1) f'_1}{f'_1 + f'_2 - d_1} \quad /1.21/$$

Pro polohy hlavních bodů platí:

$$P_1(P) = P_1(F) - f = \frac{f'_1 d_1}{f'_1 + f'_2 - d_1}$$

$$P'_2(P') = P'_2(F) - f' = \frac{f'_2 d_1}{f'_1 + f'_2 - d_1} \quad /1.22/$$

Získané výsledky lze rozšířit na centrovanou soustavu libovolného počtu čoček.

a/ Afokální soustava

¹⁹
Jestliže do /1.17/ dosadíme za d_1 :

$$d_1 = f'_1 + f'_2 + \Delta$$

dostaneme

$$f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} \quad /1.23/$$

Přiblížíme-li obě uvažované čočky k sobě tak, aby $\Delta = 0$, pak ze vztahu /1.23/ vychází, že $f' \rightarrow \infty$.

To znamená, že ohniska této soustavy leží v nekonečnu.
Takovou soustavu nazýváme afokální nebo teleskopickou.

zvětšení β určíme z /1.10/ a /1.11/ pro $f \rightarrow \infty$.
Dostaneme:

$$\frac{\beta_z}{p'} = \frac{1}{p\beta_z}$$

nebo $\frac{p'}{p} = \beta_z^2$, odtud dosazením do /1.11/

$$\beta = \beta_z \quad . \quad /1.24/$$

z /1.24/ je patrné, že afokální soustavy je konstantní /nezávislé na poloze předmětu a obrazu/.

Totéž platí i pro d a f , neboť

$$d = \beta^2$$

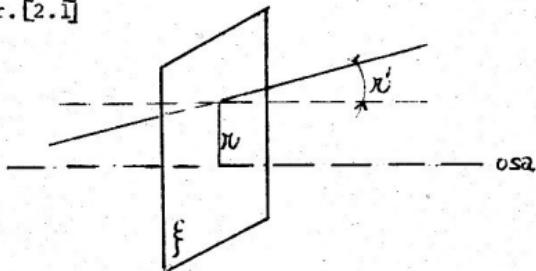
$$a \quad f = \frac{1}{\beta} \quad . \quad /1.25/$$

2. Maticová reprezentace Gaussova prostoru

Dříve, než odvodíme matice, pomocí nichž budeme sledovat chod paprsků v Gaussově prostoru, omezíme se na optickou soustavu, skládající se z rotačně souměrných čoček se všemi osami v koincidenci; takto se obecně vytváří optická osa. Dále ještě omezíme diskusi na meridiánové paprsky, to jest paprsky ležící v rovině jdoucí optickou osou.

Paprsek sledujeme pomocí tzv. referenčních rovin π , které definujeme jako roviny kolmé k optické osě, viz obr.[2.1].

Obr.[2.1]



Vzdálenost mezi optickou osou a průsečíkem paprsku s rovinou f označme veličinou r . Změnu r o dr při přemístění roviny f ve směru optické osy o dx , tj. $\frac{dr}{dx}$, označme r' .

Jde nám o zjištování vztahů mezi r, r' v nějaké počáteční rovině f a r, r' v nějaké jiné rovině f' , která nás zajímá. Lze tedy takto zjistit vztah mezi předmětem v předmětové rovině a obrazem v obrazové rovině dané optické soustavy.

Poněvadž uvažujeme prostor prvního řádu, je r a r' velmi malé. To vede k úpravám rovnic, ve kterých se

pak r a r' vyskytují jen lineární. Proto také r' nahrazujeme úhlem mezi paprskem a optickou osou, ačkoliv r' je ve skutečnosti tangentou tohoto úhlu.

/V Gaussově prostoru $\sin x = \operatorname{tg} x = x/$.

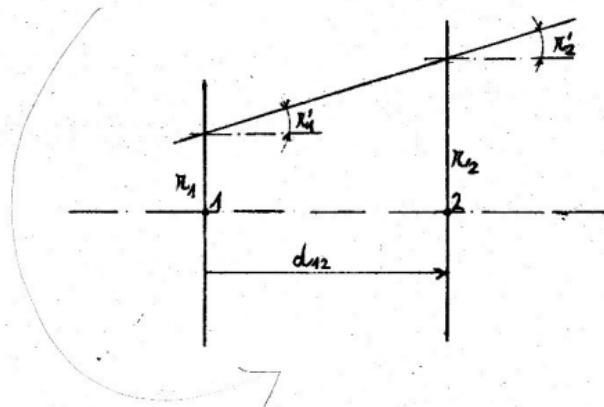
Pro sečné vzdálenosti, ohniskové vzdálenosti, poloměry, platí konvence zavedená v části 1.la/ až 1.1c/. Úhly r'_i mají znaménko shodné se změnami $\frac{dr}{dx}_i$.

Poněvadž paprsek může procházet buď homogenním prostředím nebo se lámat na rozhraní dvou prostředí s rozdílným indexem lomu, musíme v podstatě určit dva základní vztahy: vztah pro chod paprsku homogenním prostředím a vztah pro lom paprsku na rozhraní dvou prostředí.

2.1 Chod paprsku homogenním prostředím

Vztah odvodíme z obrázku [2.2]. Průsečíky referenčních rovin \mathfrak{f}_1 , \mathfrak{f}_2 s optickou osou jsou označeny pomocí číslovaného bodu 1, 2.

Obr. [2.2]



Jestliže ξ_1 a ξ_2 jsou odděleny vzdáleností $d_{1,2}$, pak obdržíme z obrázku:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + d_{1,2} \mathbf{r}'_1$$

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_2$$

Jestliže si zavedeme sloupcový vektor $\vec{\mathbf{r}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{r}'_i \end{pmatrix}$, pak předchozí vztahy můžeme psát takto:

$$\vec{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & d_{1,2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{r}}_1 \quad /2.1/$$

Poznamenejme, že determinant matice, která popisuje chod paprsku homogenním prostředím, je rovna jedné.

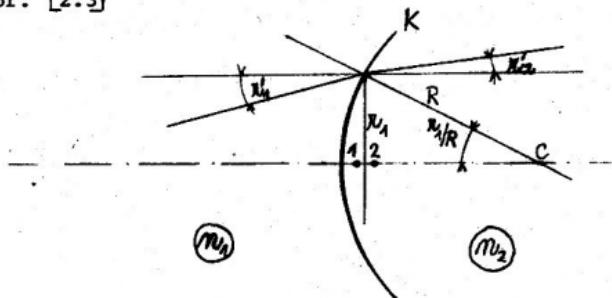
2.2 Lom paprsku na rozhraní různých prostředí

Všechna rozhraní si můžeme znázornit pomocí kulových ploch. Ve shodě s obr. [2.3] obdržíme pro $r'_1 \ll 1$, $r_1 \ll R$, $r'_2 \ll 1$ ze Snelliova zákona, kde klademe $\sin [\xi'_1 + r_1/R] = r'_1 + r_1/R$ a $\sin [\xi'_2 + r_2/R] = r'_2 + r_2/R$ tento vztah:

$$n_1 (\xi'_1 + r_1/R) = n_2 (\xi'_2 + r_2/R) \quad /2.2/$$

R je poloměr křivosti kulové plochy, n_1 , n_2 jsou indexy lomu prostředí.

Obr. [2.3]



Poněvadž jsme použili podmínky prvního přiblížení, můžeme předpokládat, že se lom děje v roviné ploše, která je tečná k rozhraní v průsečíku mezi optickou osou a vrcholem kulové plochy. Takto je zavedena poloha rovin \mathfrak{f} pro všechny lámající se paprsky.

Zavedením křivosti $K = 1/R$ do /2.2/, po úpravě obdržíme vztahy mezi r_1, r'_1 a r_2, r'_2 :

$$r_2 = r_1$$

$$r'_2 = K \left[(n_1 - n_2) / n_2 \right] r_1 + (n_1/n_2) r'_1$$

Vyjádříme-li tyto vztahy pomocí sloupcového vektoru, dostaneme:

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K[(n_1-n_2)/n_2] & n_1/n_2 \end{pmatrix} \vec{r}_1 \quad /2.3/$$

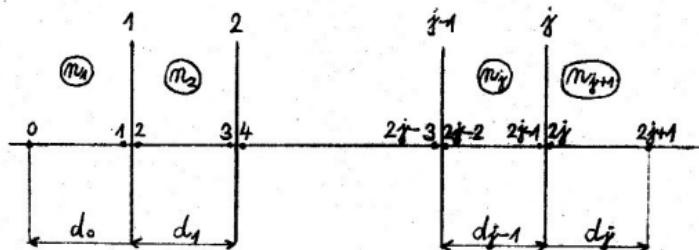
Determinant této matice, která popisuje přechod z prostředí o indexu lomu n_1 do prostředí o indexu lomu n_2 , je roven podílu těchto indexů lomu n_1/n_2 .

2.3 Chod paprsku optickou soustavou o j kulo-vých plochách

Na základě vztahů /2.1/ a /2.3/ odvodíme matici popisující chod paprsku optickou soustavou o j láma-vých plochách. Kulové plochy jsme v obrázku /2.4/ nahradili, na základě předpokladu v článku 2.2, tečnými rovinami v průsečíku optické osy s vrcholem kulové plochy.

přesun
na vrchol

Obr. [2.4]



Získaná matice nám bude udávat závislost mezi referenčními rovinami ξ_0 a ξ_{2j+1} , což je vlastně vztah mezi předmětem a obrazem.

V souhlase s obrázkem [2.4] můžeme psát:

$$A_{0,1} \vec{r}_0 = \vec{r}_1$$

$$A_{1,2} \vec{r}_1 = \vec{r}_2$$

$$A_{2,3} \vec{r}_2 = \vec{r}_3$$

$$A_{3,4} \vec{r}_3 = \vec{r}_4$$

.

.

$$A_{2j-1,2j} \vec{r}_{2j-1} = \vec{r}_{2j}$$

$$A_{2j,2j+1} \vec{r}_{2j} = \vec{r}_{2j+1}$$

kde matice $A_{0,1}, A_{2,3}, A_{4,5} \dots A_{2j,2j+1}$ jsou rovny matici ze vztahu /2.1/ s d_{1,2} vyjádřeným postupně vzdálenostmi $d_i, i \in \langle 0, j \rangle$

a matice $A_{1,2}, A_{3,4} \dots A_{2j-1,2j}$ jsou rovny matici ze vztahu /2.3/ s K vyjádřeným pomocí $K_i = 1/R_i, i \in \langle 1, j \rangle$.

Dále lze psát:

$$\vec{r}_{2j+1} = A_{2j,2j+1} \vec{r}_{2j} = A_{2j,2j+1} A_{2j-1,2j} \dots A_{2,3} A_{1,2} A_{0,1} \vec{r}_0 = \\ = A_{0,2j+1} \vec{r}_0 \quad /2.4/$$

Determinant matice $A_{0,2j+1}$ se rovná součinu determinantů matic ze vztahu /2.4/. Protože determinanty matic

$A_{0,1}, A_{2,3} \dots A_{2j,2j+1}$ jsou rovny jedné a determinanty matic $A_{1,2}, A_{3,4} \dots A_{2j-1,2j}$ jsou rovny podílu indexů lomu n_j/n_{j+1} , píšeme pro determinant matice $A_{0,2j+1}$:

$$\left\| A_{0,2j+1} \right\| = 1 \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot 1 \cdot \frac{n_2}{n_3} \dots 1 \cdot \frac{n_j}{n_{j+1}} = \frac{n_1}{n_{j+1}} \quad /2.5/$$

Determinant matice $A_{0,2j+1}$ popisující chod paprsku optickou soustavou o j kulových plochách je roven podílu indexů lomu okolí této soustavy /okolí referenčních rovin ξ_0, ξ_{2j+1} /.

Obecně lze $A_{0,2j+1}$ psát ve tvaru:

$$A_{0,2j+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad /2.6/$$

Protože pro determinant této matice platí:

$\left\| A_{0,2j+1} \right\| = n_1/n_j > 0$, pak nejvíce dva z elementů matice /2.6/ mohou být rovny nule a musí to být buď oba diagonální nebo mimodiagonální elementy.

Pro pochopení významu maticových elementů, kromě jejich jasné úlohy sledování paprsku, pokládejme rovny nule jednotlivé elementy matice $A_{0,2j+1}$:

a/ Příčné zvětšení β

Položme $a_{12} = 0$. Ze vztahu /2.4/ dostaneme:

$$\begin{pmatrix} r_{2j+1} \\ r'_{2j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}r_0 \\ a_{21}r_0 + a_{22}r'_0 \end{pmatrix}.$$

Odtud máme, $r_{2j+1} = a_{11}r_0$, což udává, že předmět je zobrazen do obrazové roviny \int_{2j} s příčným zvětšením

$$\beta = a_{11} = r_{2j+1}/r_0 \quad /2.7/$$

je-li splněno $a_{12} = 0$.

b/ Úhlové zvětšení μ

Položme $a_{21} = 0$. Pro vztah /2.4/ platí:

$$\begin{pmatrix} r_{2j+1} \\ r'_{2j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}r_0 + a_{12}r'_0 \\ a_{22}r'_0 \end{pmatrix}$$

Srovnáním souřadnic máme: $r'_{2j+1} = a_{22}r'_0$. Poněvadž úhel r'_{2j+1} závisí jen na úhlu r'_0 a ne na veličinách r_0 , r_{2j+1} , můžeme říci, že rovnoběžný svazek paprsků vnikající do optické soustavy, opustí soustavu také jako rovnoběžný.

Soustavu s $a_{21} = 0$ nazýváme teleskopickou a pro její úhlové zvětšení plyně: $\mu = a_{22} = r'_{2j+1}/r'_0$ /2.8/

c/ Obrazová ohnisková vzdálenost f'

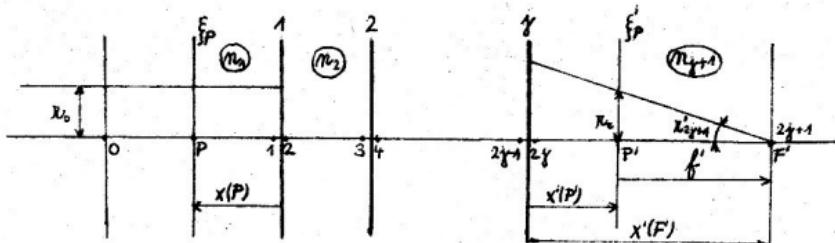
Položme $a_{11} = 0$. Pak vztah /2.4/ lze psát:

$$\begin{pmatrix} r_{2j+1} \\ r'_{2j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12}r'_0 \\ a_{21}r_0 + a_{22}r'_0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že $r_{2j+1} = a_{12}r'_0$. Protože pro $r'_0 = 0$ je $r_{2j+1} = 0$ nezávisle na hodnotě r_0 , znamená to, že rovnoběžný paprskový svažek s optickou osou se soustředuje do roviny ξ_{2j+1} s $r_{2j+1} = 0$. Neboť jde o definici ohniska, $a_{11} = 0$ značí, že rovina ξ_{2j+1} je obrazovou ohniskovou rovinou a její průsečík s optickou osou je obrazové ohnisko F' . Obrazovou ohniskovou vzdálenost f' optické soustavy o j kulových plochách získáme z obrázku [2.5].

Označme hlavní roviny optické soustavy $\xi_P, \xi_{P'}$.

Obr. [2.5]



Podle znaménkové konvence je úhel $r'_{2j+1} < 0$,
 $r_0 > 0$, $f' > 0$. Z obrázku plyne:

$$\frac{r_0}{f'} = - r'_{2j+1}$$

odtud $f' = - \frac{r_0}{r'_{2j+1}}$

Protože platí $r'_{2j+1} = a_{21}r_0 + a_{22}r'_0$
 $r'_0 = 0$

pak $r'_{2j+1} = a_{21}r_0$

a pro f' dostaneme

$$f' = - \frac{1}{a_{21}} \quad /2.9/$$

musí však být současně

$$a_{11} = 0 \quad /2.9a/$$

d/ Předmětová ohnisková vzdálenost

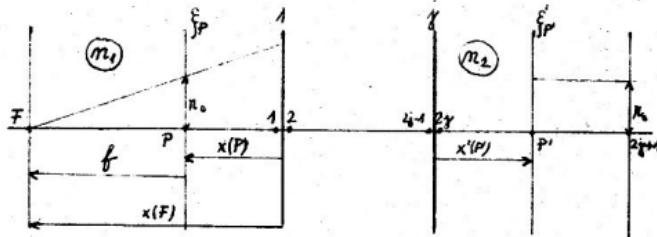
Položme $a_{22} = 0$. Vztah /2.4/ píšeme:

$$\begin{pmatrix} r_{2j+1} \\ r'_{2j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}r_0 + a_{12}r'_0 \\ a_{21}r_0 \end{pmatrix}$$

Protože $r'_{2j+1} = a_{21}r_0$, pak pro $r'_{2j+1} = 0$ je $r_0 = 0$ nezávisle na r_{2j+1} . To znamená, že pro $a_{22} = 0$ je první rovina f_0 rovna obrazové ohniskové rovině a průsečík f_0 s optickou osou je ohniskový bod F .

Předmětovou ohniskovou vzdálenost f určíme z obrázku 2.6.

Obr. 2.6



S přihlédnutím k znaménkové dohodě máme:

$$r'_0 > 0, r_{2j+1} > 0, f < 0.$$

Z obrázku dostaneme:

$$\frac{r_{2j+1}}{-f} = \frac{r'_0}{r'_0}$$

$$\text{odtud } f = -\frac{r_{2j+1}}{r'_0}$$

$$\text{Protože } r_{2j+1} = a_{11}r'_0 + a_{12}r'_0$$

$$a_{11}r'_0 = 0$$

$$\text{platí } a_{12} = \frac{r_{2j+1}}{r'_0}$$

a pro f platí:

$$f = -a_{12}$$

/2.10/

platí-li současně

$$a_{22} = 0$$

/2.10a/

e/ Určení poloh ohnisek $x(F)$ a $x'(F')$

Vztah /2.4/ lze s přihlédnutím k obrázkům 2.3 a 2.6 napsat:

$$\begin{pmatrix} r_{2j+1} \\ r'_{2j+1} \end{pmatrix} = A_{2j,F'} A_{1,2j} A_{F,1} \begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x'(F') \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x(F) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} s_{11} + s_{21}x'(F') & s_{11} + s_{21}x'(F') - x(F) + s_{12} + s_{22}x'(F') \\ s_{21} & -s_{21}x(F) + s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{pmatrix}$$

/2.11/

d/ Určení $x(F)$

Položu $x(F)$ určíme z podmínky 2.3d, kde klademe $a_{22}=0$. Ze vztahu /2.11/ máme:

$$-s_{21}x(F) + s_{22} = 0$$

$$\text{odtud } x(F) = s_{22}/s_{21} \quad /2.12/$$

$\beta/$ Určení $x'(F')$

Z podmínky 2.3c určíme $x'(F')$, klademe-li ve vztahu /2.11/ $a_{11} = 0$.

Platí: $s_{11} + s_{21}x'(F') = 0$

odtud $x'(F') = -s_{11}/s_{21}$ /2.13/

f/ Polohy hlavních bodů P, P'

Z obrázků 2.5 a 2.6 určíme, že:

$$x'(P) = x'(F) - f' = -\frac{s_{11}}{s_{21}} + \frac{1}{s_{21}} = \frac{1-s_{11}}{s_{21}} \quad /2.14/$$

$$x(P) = x(F) - f = \frac{s_{22}}{s_{21}} + s_{12} \quad /2.15/$$

g/ Vzájemný vztah mezi f a f'

Determinant matice $A_{0,2j+1}$, kde klademe podmínky z časti c/ a d/, tj. $a_{11} = 0, a_{22} = 0$, má tvar:

$$\left| A_{0,2j+1} \right| = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = -a_{21}a_{12} = \frac{1}{f'} - f = -\frac{f}{f'}$$

Ze vztahu /2.5/ máme:

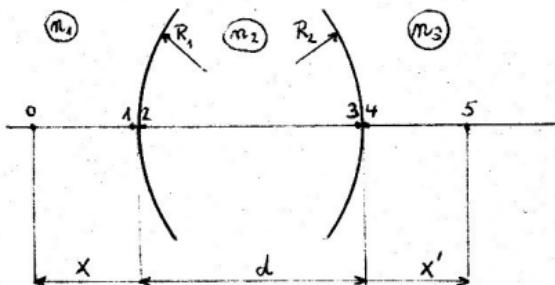
$$\left| A_{0,2j+1} \right| = \frac{n_1}{n_{j+1}}$$

a odtud $f'/f = -n_{j+1}/n_1$ /2.16/

2.3.1 Tloustá čočka

Uvažujme tloustou bikonvexní čočku o tloušťce d , indexu lomu n_2 , a o poloměrech R_1, R_2 , jak je znázorněno na obr. [2.7].

Obr. 2.7



V souhlase s obr. 2.7 máme:

$$A_{0,1}\vec{r}_0 = \vec{F}_1$$

$$A_{1,2}\vec{r}_1 = \vec{F}_2$$

$$A_{2,3}\vec{r}_2 = \vec{F}_3$$

$$A_{3,4}\vec{r}_3 = \vec{F}_4$$

$$A_{4,5}\vec{r}_4 = \vec{F}_5$$

kde matice $A_{0,1}, A_{2,3}, A_{4,5}$ jsou rovny matici ze vztahu /2.1/ s vyjádřeným pomocí vzdáleností, d , x ; matice $A_{1,2}, A_{3,4}$ jsou rovny matici ze vztahu /2.3/, kde K je vyjádřeno pro matici $A_{1,2}$ jako $K_1 = 1/R_1$ a pro matici $A_{3,4}$ jako $K_2 = -1/R_2$.

Pro \vec{r}_5 dostaneme:

$$\vec{r}_5 = A_{4,5}\vec{r}_4 = A_{4,5}A_{3,4}A_{2,3}A_{1,2}\vec{r}_0 = A_{0,5}\vec{r}_0.$$

Matice $A_{0,5}$ má tvar:

$$\begin{aligned}
 A_{0,5} &= A_{4,5} A_{3,4} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K_1[(n_1-n_2)/n_2] & n_1/n_2 \end{pmatrix} A_{0,1} = \\
 &= A_{4,5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K_2[(n_3-n_2)/n_3] & n_2/n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\
 &\quad \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K_1[(n_1-n_2)/n_2] & n_1/n_2 \end{pmatrix} A_{0,1} = \\
 &= A_{4,5} \begin{pmatrix} 1+dK_1[(n_1-n_2)/n_2] & d(n_1/n_2) \\ K_1[(n_1-n_2)/n_2] + K_2[(n_3-n_2)/n_3] + dK_1K_2[(n_1-n_2)(n_3-n_2)/n_2n_3] & n_1/n_3[1+dK_2(n_3-n_2)/n_2] \end{pmatrix} A_{0,1} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} c_{11}+c_{21}x' & -(c_{11}+c_{21}x')x+c_{12}+c_{22}x' \\ c_{21} & -c_{21}x+c_{22} \end{pmatrix} /2.17/
 \end{aligned}$$

Vztah /2.17/ je vlastně zobrazovací rovnici pro tlustou čočku. Obsahuje všechny nezbytné informace pro sledování paprsku. Samotné elementy nám dávají na základě diskuze v článku 2.3 přímo polohu ohnísek, ohniskové vzdálenosti, příčné zvětšení atd.

a/ Ohniskové vzdálenosti f, f'

Ze vztahu /2.9/ dostaneme ohniskovou vzdálenost f' :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} = -a_{21} = -c_{21} = -\left[K_1(n_1-n_2)/n_3 + K_2(n_3-n_2)/n_3 + dK_1K_2(n_1-n_2)(n_3-n_2)/n_2n_3 \right]$$

Je-li čočka ve vzduchu, pak $n_1 = n_3 = 1, n_2 = n$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'} &= -\left[\frac{1}{R_1}(1-n) - \frac{1}{R_2}(1-n) - \frac{d(1-n)(1-n)}{R_1 R_2 n} \right] = \\ &= (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{d}{R_1 R_2} \frac{(n-1)^2}{n} \end{aligned}$$

Dostali jsme známý tvar pro optickou mohutnost tlusté čočky.

Při určování f , ztrácí referenční rovina \int_5 význam, neboť paprskový svazek jde rovnoběžně s optickou osou a proto můžeme psát $\int_5 = \int_4$. Pak ve vztahu /2.17/ můžeme položit $x' = 0$.

Ze vztahu /2.10/ a /2.10a/ dostaneme:

$$f = -a_{12} = -\left[-(c_{11} + c_{21}x') x + c_{12} + c_{22}x' \right] = -(-c_{11}x + c_{12})$$

$$a_{22} = -c_{21}x + c_{22} = 0$$

odtud

$$x = c_{22}/c_{21}$$

a pak platí

$$\begin{aligned} f &= -(-c_{11}c_{22}/c_{21} + c_{12}) = c_{11}c_{22}/c_{21} - c_{12} = dn_1/n_2 + \\ &+ \frac{1}{K_1(n_1-n_2)/n_3 + K_2(n_3-n_2)/n_3 + dK_1K_2(n_1-n_2)(n_3-n_2)/n_2n_3} \end{aligned}$$

$$-dn_1/n_2 = 1/a_{22} = -f'$$

Ohniskovou vzdálenost f jsme mohli také získat přímo z obecného výrazu /2.16/.

Platí:

$$f'/f = -n_2/n_1 = -1$$

neboli $f' = -f$

b/ Určení poloh ohnisek $x(F)$, $x'(F')$

Ze vztahu /2.12/ plyne:

$$x(F) = s_{22}/s_{21} = c_{22}/c_{21} = -c_{22}f' = -f' \left[1 + dK_2(1-n)/n \right] = \\ = -f' \left[1 + d(n-1)/R_2 n \right]$$

ze vztahu /2.13/ máme:

$$x'(F') = -s_{11}/s_{21} = -c_{11}/c_{21} = f'c_{11} = \\ = f' \left[1 + dK_1(1-n)/n \right] = f' \left[1 - d(n-1)/R_1 n \right]$$

c/ Poloha hlavních bodů

Dosazením do /2.14/ a /2.15/ vychází:

$$x'(P') = x'(F') - f' = -f'(n-1)d/R_1 n$$

$$x(P) = x(F) + f' = -f'(n-1)d/R_2 n$$

d/ Příčné zvětšení

Pro příčné zvětšení platí vztah /2.7/ a podmínka
 $a_{12} = 0$.

Z matice /2.17/ máme:

$$a_{12} = -(c_{11} + c_{21}x')x + c_{12} + c_{22}x' = 0$$

$$\text{odtud } x' = \frac{c_{11}x - c_{12}}{c_{22} - c_{21}x}$$

$$\begin{aligned}\beta &= a_{11} = c_{11} + c_{21}x' = c_{11} + c_{21} \frac{c_{11}x - c_{12}}{c_{22} - c_{21}x} = \\ &= \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{22} - c_{21}x}\end{aligned}$$

Dostali jsme výraz pro příčné zvětšení tlusté čočky vyjádřené pomocí elementů maticy ze vztahu /2.17/.

Dosazením dostaneme:

$$\beta = \frac{[1+dK_1(1-m)/n] [1+dK_2(1-n)/n] + d/f'n}{1+dK_2(1-n)/n + x/f'}$$

po úpravě čitatele:

$$\beta = \frac{1}{x/f' + d(n-1)/R_2 n + 1}$$

Odvození veličin f , f' , $x(F)$, $x'(F')$, $x(P)$, $x'(P')$, můžeme porovnat s odvozením v části 1.2.5. Vidíme, že náročnost výpočtu je v podstatě stejná. Výhody maticové reprezentace se projeví až při aplikaci na složitější optické soustavy.

2.3.2 Sledování chodu paprsku optickou soustavou maticí vztázenou na ohniska

Z diskuse maticových elementů vyplývá, že pro $a_{11} = 0$ je $a_{21} = -1/f'$ a pro $a_{22} = 0$ je $a_{12} = -f$.

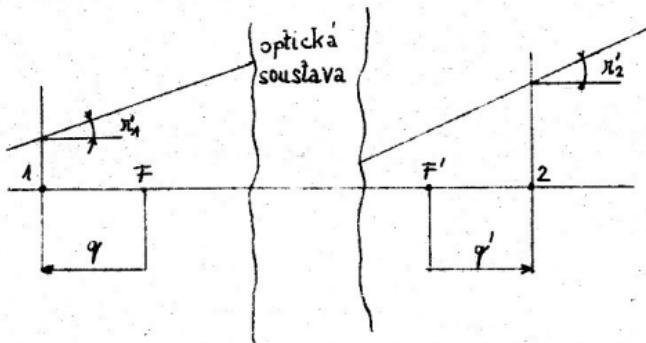
Pak matice vztažená na obě ohniskové roviny dané optické soustavy má tvar:

$$A_{F,F'} = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ -1/f' & 0 \end{pmatrix} \quad /2.18/$$

Matrice $A_{F,F'}$ je jakousi analogií k Newtonově zobrazovací rovnici /1.8/.

Známe-li ohniskové vzdálenosti optické soustavy, pak matici zjišťující vztah mezi předmětovou rovinou ξ_1 , umístěnou nalevo od ohniska F ve vzdálenosti q a obrazovou rovinou ξ_2 , ve vzdálenosti q' napravo od ohniska F' , obdržíme násobením matice $A_{F,F'}$ zleva $\begin{pmatrix} 1 & q' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a zprava $\begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, viz obr. [2.8]

Obr. [2.8]



Příšeme:

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & q' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -f \\ -1/f' & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -1/f' \begin{pmatrix} q' & ff' - qq' \\ 1 & -q \end{pmatrix} \quad /2.19/$$

Determinant $\|A_{1,2}\|$ je roven:

$$\|A_{1,2}\| = -qq'/f'^2 + qq'/f'^2 - f/f' = \\ = -f/f'$$

$$a \quad f/f' = -n_1/n_2$$

a/ Určení vztahu mezi předmětovou a obrazovou rovinou

Podle 2.3a/ máme: $a_{12} = 0$

Dosazením z /2.19/ dostaneme:

$$-f + qq'/f' = 0$$

$$\text{neboli} \quad qq' = ff'$$

Dostali jsme Newtonovu zobrazovací rovnici.

b/ Příčné zvětšení β

Vidíme, že podle /2.7/ je:

$$\beta = a_{11} = -q'/f'$$

a pomocí /1.8/ lze také psát:

$$\beta = -q'/f' = -f/q$$

/2.20/

Zvětšení β závisí na poloze předmětu na optické ose a na f a f' soustavy.

c/ Osové zvětšení α

Z /1.8/ lze určit α diferenciaci podle dq_1 .

Píšeme-li α jako

$$\alpha = \frac{dq'}{dq}$$

/2.21/

$$a) q' = ff'/q$$

$$\text{pak } dq' = \frac{ff'dq}{q^2} - \frac{f'dq}{q}$$

$$\text{odtud } \alpha = \frac{f'}{q} \beta - \frac{f'f}{qf} = -\frac{f'}{f} \beta^2 = \frac{n_1}{n_2} \beta^2$$

$$\text{je-li } n_1 = n_2 = 1 \text{ pak } \alpha = \beta^2$$

Ze vztahu /2.21/ pro α můžeme vyvodit toto:

Obraz se pohybuje v témže směru jako předmět, kromě případu, kdy se předmět pohybuje přes ohniskovou rovinu. V tomto případě se obraz pohybuje z $+\infty$ do $-\infty$, nebo v opačném směru, závisejícím na pohybu předmětu.

2.3.3 Afokální soustava

Afokální soustava je optickou soustavou, jejíž ohniska leží v nekonečnu. Proto podle části 1.2.2 můžeme o afokální soustavě říci, že paprskové svazky vstupující do ní rovnoběžně, vystupují z ní opět jako rovnoběžné.

Omezíme se na teleskopickou soustavu ve vzduchu,
tj. $s n_1 = n_2 = 1$, viz obr. [2.9]

Obr. [2.9]



V části 2.3b/ jsme odvodili, že úhlové zvětšení $\beta = a_{22}$,
a že pro afokální soustavu platí $a_{21} = 0$. Pak matice
popisující vztah mezi dvěma referenčními rovinami
 ξ_1, ξ_2 má tvar:

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1/\beta & a_{12} \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad /2.22/$$

kde hodnota levého horního elementu vyplývá z podmínky $\|A_{1,2}\| = 1$.

Abychom se přesvědčili, zda existují páry rovin ξ_i , které jsou ve vztahu předmět - obraz, zavedeme rovinu ξ_0 ve vzdálenosti x malevo od ξ_1 a rovinu ξ_3 ve vzdálenosti x' napravo od ξ_2 viz obr. [2.9]. Postupujeme podobně jako při určení vztahu /2.4/ a píšeme:

$$\vec{r}_3 = A_{0,3} \vec{r}_0$$

kde $A_{0,3}$ obdržíme pomocí /2.1/ a /2.22/:

$$\begin{aligned}
 A_{0,3} &= \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\beta & a_{12} \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1/\beta & a_{12} + x'\beta & -x/\beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} /2.23/
 \end{aligned}$$

Polohy rovin, které jsou ve vztahu předmět - obraz, obdržíme podle části 2.3a/.

Klademe-li horní pravý element této matice rovný nule, dostáváme:

$$x' = x/\beta^2 - a_{12}/\beta$$

a odtud diferenciaci

$$dx' = dx/\beta^2 \quad /2.24/$$

Z výrazů /2.23/ a /2.24/ vyvodíme důležité závěry:

a/ Vztah /2.24/ vyjadřuje:

Jestliže se předmět pohybuje po vzdálenosti dx , obraz se pohybuje po vzdálenosti dx/β^2 ve stejném směru.
Vztah /2.24/ je stejný s /2.21/, který definuje osové zvětšení jako podíl dx'/dx .

Platí pak:

$$\alpha = 1/\beta^2 \quad /2.25/$$

b/ Příčné zvětšení β , odvozené dříve, je rovno převrácené hodnotě úhlového zvětšení, jak plyne z matice /2.23/ a je stejné pro všechny páry rovin /nezáleží na poloze předmětu a obrazu/.

Pro příčné zvětšení dostaneme výraz definovaný vztahem /1.25/

$$a_{11} = \beta = 1/\beta$$

c) Zvětšení afokální soustavy α, β, f jsou nezávislá na poloze předmětu a obrazu. Jsou pro dané afokální soustavy konstantní.

2.3.4 Zrcadla ve spojení s optickou soustavou

Je známo, že z matematického hlediska je možno odraz považovat za zvláštní případ lomu. Všechny vzorce odvozené pro soustavu lámových ploch zůstávají platné pro soustavu zrcadel zavedeme-li substituci $n = -n'$.

Pak vztah /2.3/ můžeme psát, položíme-li $n_2 = -n_1$:

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ K(n_1+n_2)/-n_1 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2K & -1 \end{pmatrix} \vec{r}_1$$

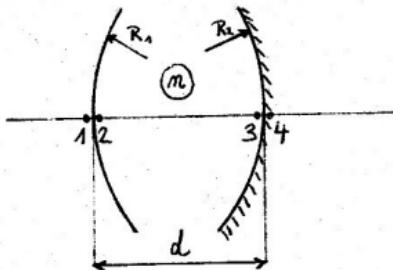
/2.26/

Tato zobrazovací rovnice popisuje odraz na konkávním nebo konvexním zrcadle, podle toho, je-li křivost K záporná nebo kladná. Víme, že člen matice $-a_{22} = f$. Jde-li o konkávní zrcadlo pak $K = -1/R$ a odtud ohnisková vzdálenost $f = R/2$. Pro konvexní zrcadlo je $K = 1/R$ a pak $f = -R/2$.

Při sledování paprsku soustavou složenou z lámových a odrazných ploch postupujeme stejně jako u soustavy složené jen z lámových ploch, kde pro lámové plochy užíváme vztahu /2.3/ a pro zrcadla /2.26/. Je však nutné přihlížet ke znaménkům vzdálenosti vrcho-lů; u soustavy lámových ploch byly tyto vzdálenosti jen kladné.

Pro ilustraci určíme ohniskovou vzdálenost zrcadlové čočky o tloušťce d , indexu lomu n , je-li poloměr lámové plochy R_1 a poloměr odrazné plochy $-R_2$, viz obr. [2.10].

Obr. [2.10]



Podle obrázku lze psát:

$$\vec{r}_2 = A_{1,2} \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_3 = A_{2,3} \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_4 = A_{3,4} \vec{r}_3$$

$$\vec{r}_5 = A_{3,2} \vec{r}_4$$

$$\vec{r}_6 = A_{2,1} \vec{r}_5$$

$$\vec{r}_6 = A_{2,1} A_{3,2} A_{3,4} A_{2,3} A_{1,2} \vec{r}_1 = A_{1,4,1} \vec{r}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)/R_1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & -1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1-n)/R_1 n & 1/n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{2d}{R_2} & d\left(1 + \frac{2d}{R_2}\right) + d \\ \frac{n-1}{R_1} + \frac{2(n-1)d}{R_1 R_2} - \frac{2n}{R_2} & \frac{2d(n-1)}{R_1} + \frac{2(n-1)d^2}{R_1 R_2} - \frac{2nd}{R_2} - n \\ 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R_1 n} & 1/n \end{pmatrix}$$

Po vynásobení obou matic odtud plyne pro Ψ :

$$\Psi = -a_{21} = -\left\{ \frac{n-1}{R_1} + \frac{2(n-1)d}{R_1 R_2} - \frac{2n}{R_2} + \frac{1-n}{n R_1} \left[\frac{d(n-1)}{R_1} + \frac{2(n-1)d^2}{R_1 R_2} - \frac{2nd}{R_2} + \frac{(n-1)d}{R_1} - n \right] \right\}$$

Po úpravě:

$$\Psi = \frac{2}{R_2} \left[\frac{R_2}{R_1} + n \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{2(n-1)d}{R_1} + \frac{(n-1)^2 d}{n} \frac{R_2}{R_1} + \frac{d^2 (n-1)^2}{n R_1^2} \right]$$

2.3.5 Poznámka k mimoběžným paprskům

Při diskusi mimoběžných paprsků, tj. paprsků, které nejsou v rovině s optickou osou, bychom zvolili Kartézské souřadnice x, y ve všech referenčních rovinách ξ .

Osy x, y ve všech rovinách ξ jsou navzájem rovnoběžné.

Vztahy mezi různými referenčními rovinami jsou v tomto případě reprezentovány sloupcovým vektorem r ve tvaru

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{a matici} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

kde členy b_{jk} jsou 2×2 submatice.

Meridiánový paprsek definovaný pomocí $x \neq 0$ a $x' \neq 0$ a $y = y' = 0$ v jedné referenční rovině, musí také splňovat $y = y' = 0$ v každé jiné referenční rovině. To je pouze možné, jestliže $b_{21} = 0$. Pro meridiánový paprsek $y \neq 0$, $y' \neq 0$ a $x = x' = 0$ obdržíme analogicky $b_{12} = 0$.

V důsledku rotační symetrie kolem optické osy, musí být submatice popisující meridiální paprsky identické pro všechny meridiální plochy, tj. $b_{11} = b_{22}$.

Můžeme proto říci, že veličiny r , r' , kterých se užívá v této diplomové práci mohou být interpretovány jako hodnoty popisující projekci mimoběžného paprsku do každé meridiální plochy.

3. Aplikace maticové reprezentace

Nejdříve aplikujeme maticový aparát Gaussova prostoru na tři optické soustavy, které mohou být výhodně užity v různých kombinacích v laboratoři. Jsou to: dublet, kombinace teleskopické soustavy se soustavou s ohnisky v konečné vzdálenosti a jednoduchá soustava s proměnnou ohniskovou vzdáleností /transfokátor/. Pak si všimneme základní konstrukce Huygensova okuláru.

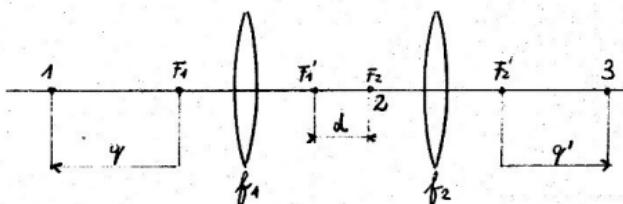
Všechny tyto soustavy rozebíráme ve vzduchu, tj.
 $n_1 = n_2 = 1$.

3.1 Dublet

Velmi často se v praxi setkáváme s dvojčlennými soustavami - dublety. Diskuse dubletu je velmi důležitá proto, že u optických přístrojů jako jsou dalekohledy nebo mikroskopy, můžeme považovat jejich objektiv s okulárem za dublet. Pomocí tohoto zjednodušení můžeme pak v Gaussově prostoru názorně vyložit jejich funkci.

V souhlase s obrázkem [3.1] a užitím /2.19/ vy-počítáme matici $A_{1,3}$, která udává vztah mezi rovinami \S_1 a \S_2 .

Obr. 3.1



Obdržíme:

$$A_{1,3} = A_{2,3} A_{1,2} = \frac{1}{f'_1 f'_2} \begin{vmatrix} q' & f'_2 f'_2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & -qd + f'_1 f'_1 \\ 1 & -q \end{vmatrix}$$

a odtud

$$A_{1,3} = \frac{1}{f'_1 f'_2} \begin{vmatrix} dq' - f'^2_2 & -q'(qd + f'^2_1) + qf'^2_2 \\ d & -(qd + f'^2_1) \end{vmatrix} \quad /3.1/$$

Z obecně platného vztahu /2.9/ získáme ohniskovou vzdálenost dubletu:

$$f' = -\frac{1}{a_{21}} = -\frac{f'_1 f'_2}{d} \quad /3.2/$$

Vidíme, že f' můžeme měnit spojité změnou vzdálenosti d mezi obrazovým ohniskem F'_1 a předmětovým ohniskem F'_2 .

Z podmínky /2.9a/ $a_{11} = 0$ získáme polohu obrazového ohniska F' celého dubletu od obrazového ohniska 2. členu F'_2 :

$$\text{Máme} \quad q'_F, d - f'^2_2 = 0$$

$$\text{odtud} \quad q'_F, = \frac{f'^2_2}{d} \quad /3.3/$$

Obdobně lze získat polohu předmětového ohniska dubletu F a jeho ohniskovou vzdálenost f .

Ze vztahu /2.10/ a podmínky /2.10a/ $a_{22} = 0$ plyne:

$$a_{22} = -(qd + f'^2_1) = 0$$

$$\text{odtud} \quad q = -\frac{f'^2_1}{d} \quad /3.4/$$

Protože referenční rovina f_3 ztrácí při chodu paprsků z nekonečna význam, klademe $q' = 0$.

Pak pro f platí:

$$f = -a_{12} = -q f_2'^2 / f_1' f_2' = -q f_2' / f_1'$$

po dosazení za q

$$f = f_1' f_2' / d$$

Pro ohniskové vzdálenosti dubletu ve vzduchu tedy platí:
 $f = -f'$.

Ze vztahu /3.4/ získáme vzdálenost předmětového ohniska dubletu od předmětového ohniska 1. členu.

$$q_F = -f_1'^2 / d \quad /3.5/$$

Je-li $d = 0$, pak vztah /3.2/ popisuje teleskopickou soustavu.

Víme, že teleskopická soustava sloužící k pozorování velmi vzdálených předmětů se nazývá dalekohled.

U dalekohledů, které se používají k zaměřování na předměty nacházející se v konečné vzdálenosti, aby se paralaxa zámerné značky vzhledem k pozorovanému obrazu zmenšila na minimální míru, se poruší poněkud afokálnost soustavy nastavením na konečnou vzdálenost.

Máme-li pozorovat bez akomodace, musí být rovina f_3 v nekonečnu. To je ekvivalentní tomu, že předmětové ohnisko F soustavy musí být v koincidenci s předmětovou rovinou. Vzdálenost d proto určíme ze vztahu /3.5/:

$$d = -f_1'^2 / q ,$$

kde q je vzdálenost předmětu od ohniska F_1 .

Díváme-li se na mikroskop jako na dublet o ohniskové vzdálenosti f' dané vztahem /3.2/ vidíme, že zvětšení mikroskopu lze psát, dosadíme-li do známého tvaru

$$\Gamma = \frac{250}{f'}$$

pak máme: $\Gamma = \frac{250}{f'_1} \frac{d}{f'_2}$.

Zvětšení Γ můžeme zvětšit zmenšením f'_1, f'_2 objektivu a okuláru a oddálením F'_1, F'_2 na vzdálenost d srovnatelnou s ohniskovými vzdálenostmi f'_1, f'_2 .

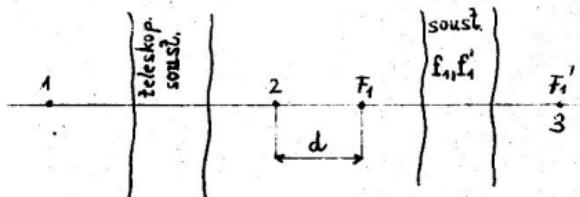
Aby však nebylo třeba při přechodu k větším zvětšením mikroskop k pozorovanému předmětu přiblížovat /až na nepatrny mikroposuv/, je nutno celý mikroskop upravit tak, aby vzdálenost předmětu a předmětového ohniska okuláru F_2 byla stejná.

3.2 Kombinace teleskopické soustavy se soustavou s ohnisky v konečné vzdálenosti

Často potřebujeme optickou soustavu, u které lze měnit vzdálenost mezi předmětovým a obrazovým ohniskem bez zmeny ohniskových vzdáleností. Takovou optickou soustavou lze obdržet pomocí kombinace teleskopické soustavy se soustavou s ohnisky v konečné vzdálenosti, viz obr.

[3.2]

Obr. [3.2]



Matici spojující r_1 a r_3 je dána pomocí /2.19/ a /2.22/:

$$A_{1,3} = -1/f'_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -f'^2_1 \\ 1 & -d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$= -1/f'_1 \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -f'^2_1 \beta^2 \\ 1 & -d \beta \end{pmatrix} \quad /3.6/$$

Ze vztahu /3.6/ vyplývá:

a/ Ohnisková vzdálenost kombinované soustavy je rovna podle /2.9/ a podmínky $a_{11} = 0$:

$$f_{\text{komb}} = -1/a_{21} = \beta f'_1$$

f_{komb} je nezávislá na vzdálenosti mezi teleskopickou soustavou a soustavou s ohnisky F_1, F'_1 .

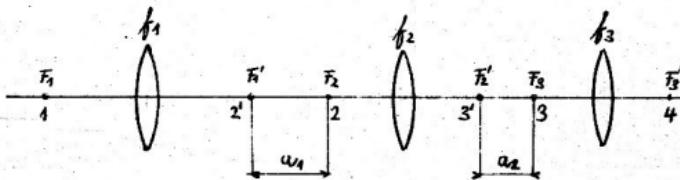
b/ Obrazové ohnisko F' celé kombinované soustavy je totožné s obrazovým ohniskem F'_1 . Leží-li předmětové ohnisko F_1 ve vzdálenosti d napravo/nalevo/ od ξ_2 , pak předmětové ohnisko kombinované soustavy F leží napravo/nalevo/ od ξ_1 ve vzdálenosti $d\beta^2$, jak plyne ze vztahu /2.24/, kde klademe $dx' = d$.

3.3 Jednoduchá soustava s proměnnou ohniskovou vzdáleností /transfokátor/

Někdy požadujeme optickou soustavu, jejíž ohnisková vzdálenost f může být spojitě měněna bez změny vzdálenosti mezi jejími ohniskovými body.

Jak je vidět ze vztahu /3.2/ nemůže být touto soustavou dublet, protože f dubletu lze spojitě měnit jen změnou vzdálenosti d mezi obrazovým ohniskem 1. členu a předmětovým ohniskem 2. členu, a tím se mění vzdálenost mezi ohnisky soustavy, kterou žádáme konstantní. Proto prodiskutujeme triplet, viz obr. [3.3]

Obr. [3.3]



Jelikož posuv samotné 1. nebo 3. čočky je ekvivalentní změně vzdálenosti mezi dvěma složkami dubletu, budeme pohybovat jen 2. čočkou. Protože vzdálenost mezi 1. a 3. čočkou bude konstantní, bude konstantní i součet vzdáleností mezi ohnisky F'_1 , F_2 a F'_2 , F_3 :

$$a_1 + a_2 = a = \text{konst.}$$

Z obr. [3.3] obdržíme matici $A_{1,4}$, která popisuje vztah mezi $\{_1$ a $\{_4$: $A_{1,4} = A_{3,4}A_{2,3}A_{1,3}$.

Vyjádříme-li tyto 3 matice pomocí /2.18/ dostaneme:

$$A_{1,4} = -1/f'_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & f_3 f'_3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1/f'_2 \cdot \begin{pmatrix} a_2 & f_2 f'_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot -1/f'_1 \begin{pmatrix} a_1 & f_1 f'_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1/f'_1 f'_2 f'_3 \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} f_3 f'_3 & 0 \\ a_2 & f_2 f'_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & f_1 f'_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -1/f'_1 f'_2 f'_3 \cdot \begin{pmatrix} a_1 f_3 f'_3 & f_1 f'_1 f_3 f'_3 \\ a_1 a_2 + f_2 f'_2 & a_2 f_1 f'_1 \end{pmatrix}$$

Pro ohniskovou vzdálenost f' transfokátoru plyne podle /2.9/:

$$-1/a_{21} = f' = \frac{f'_1 f'_2 f'_3}{a_1 a_2 + f_2 f'_2} \quad * \quad /3.7/$$

Poněvadž vzdálenost mezi obrazovým ohniskem transfokátoru F' a jeho předmětovým ohniskem F má být konstantní, můžeme psát:

$$-x(F) + f'_1 + a_1 + 2f'_2 + a_2 + f'_3 + x'(F') = k_1$$

kde k_1 je konstanta.

Protože $a = a_1 + a_2$, f'_1 , f'_2 , f'_3 je konstantní, musí být konstantní i součet vzdáleností F/F' od 1. /3./ čočky:

$$-x(F) + x'(F') = k_2, \quad \text{kde } k_2 \text{ je konstanta.}$$

ze vztahu /2.12/ a /2.13/ plyne pro $x(F)$ a $x'(F')$:

$$x(F) = s_{22}/s_{21}$$

$$x'(F') = -s_{11}/s_{21}$$

$$-x(F) + x'(F') = -1/s_{21}(s_{22} + s_{11}) = k_2 \quad /3.8/$$

kde s_{11} , s_{12} , s_{21} a s_{22} jsou členy matici $A_{1,4}$.

Dosadíme-li do /2.34/, máme:

$$\frac{f'_1 f'_2 f'_3}{a_1 a_2 + f'_2 f'_3} \left(\frac{-a_2 f'_1 f'_1}{f'_1 f'_2 f'_3} - \frac{a_1 f'_3 f'_3}{f'_1 f'_2 f'_3} \right) = k_2$$

Po úpravě

$$\frac{a_1 f_3^2 + a_2 f_1^2}{a_1 a_2 - f_2^2} = k_2$$

Klademe-li $a_2 = a - a_1$, pak

$$\frac{a_1 f_3^2 + (a - a_1) f_1^2}{a_1(a - a_1) - f_2^2} = k_2$$

Výraz bude nezávislý na a_1 , to znamená na posuvu 2. čočky, bude-li se čitatel rovnat nule.

Odtud dostaneme:

$$a = 0, f_1^2 = f_3^2$$

$$\text{neboli } a_1 = -a_2, |f_1| = |f_3|$$

/3.9/

Jsou-li splněny tyto podmínky, je vzdálenost F a F' konstantní a nezávislá na poloze 2. čočky, tj. nezávislá na změně ohniskové vzdálenosti transfokátoru f' , pro kterou platí, dosadíme-li /3.9/ do /3.7/:

$$f' = \frac{f'_1 f'_2 f'_3}{a_1 a_2 - f_2^2} = \frac{-f_1^2 f_2}{-(a_1^2 + f_2^2)} = \frac{f_1^2 f_2}{a_1^2 + f_2^2} \quad /3.10/$$

3.4 Huygensův okulár

Huygensův okulár se používá v kombinaci s achromatickými objektivy. Skládá se ze 2 jednoduchých plánek-vexních čoček přivrácených vypuklými plochami k předmětu. První čočka se často nazývá kolektivem a druhá oční čočkou.

V Gaussově prostoru jde o fyzikálně dokonalé zobrazení. Projevují se jen barevné vady velikosti a polohy, neboť paraxiální veličiny závisí na vlnové délce světla λ . Proto si všimneme konstrukce okuláru jen z hlediska chromatické korekce.

Poněvadž výstupní pupila přístrojů je obvykle malá, projeví se hlavně barevná vada velikosti.

Kompletně chromaticky korigovaná optická soustava by byla popsána maticí, jejíž elementy by byly úplně nezávislé na vlnových délkách světla. Elementy matice jsou nezávislé na λ , jestliže jejich 1. derivace podle λ je nulová. Lze snadno ukázat, že derivace členů podle λ matice popisující dublet, nejsou všechny rovny nule, viz /3.1/. Hledáme proto parametry a vzdálenost členů okuláru tak, aby barevná vada velikosti byla nejméně nepřijemná.

Nabývá-li určitá optická veličina, např. ohnisko-vá vzdálenost, stejné hodnoty pro světla dvou různých vlnových délek λ , říkáme, že optická soustava je vzhledem k oné veličině achromatická.

Vlnové délky, pro něž má být dosaženo achromacie, volíme podle účelu, jakému má optická soustava sloužit. Pro okuláry se volí λ odpovídající Fraunhoferovým čarám C a F.

Uvažujme nejprve okulár jako obecnou optickou soustavu znázorněnou na obr. 2.2 a zjistěme vztah mezi předmětovou plochou ξ_1 , v níž je umístěn mimoosový předmětový bod, a plochou vstupní pupily oka ξ_3 .

Matici $A_{0,3}$ lze napsat:

$$A_{0,3} = \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + x'a_{21} & a_{12} - a_{11}x + x'(a_{22} - a_{21}x) \\ a_{21} & a_{22} - xa_{21} \end{pmatrix}$$

Protože jsme zvolili ξ_1 předmětovou rovinou, klademe $x = 0$.

Podle části 2.3a/ určíme polohu ξ_3 , položíme-li horní pravý element matice rovný nule:

$$a_{12} + x'a_{22} = 0$$

odtud $x' = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$ /3.11/

Ze vztahu pro příčné zvětšení určíme veličinu r_3 :

$$r_3 = r_1 \beta = r_1 (a_{11} + x'a_{21}) - r_1 \left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}} \right) -$$

$$= \frac{r_1 \|A_{1,2}\|}{a_{22}}$$

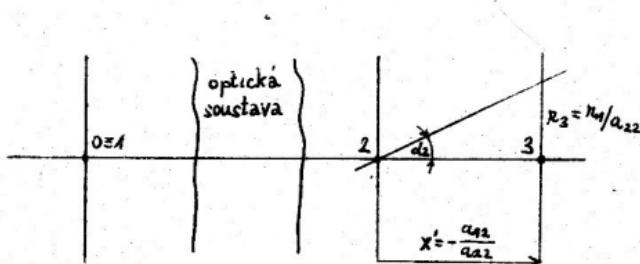
Protože $\|A_{1,2}\| = 1$,

$$r_3 = r_1/a_{22}$$

/3.12/

Výsledky jsou uvedeny na obr. [3.4]

Obr. [3.4]



α_2 je úhel, pod kterým vidíme obraz bodu okem.

Aby se obraz bodu nejevil jako přímka ve všech barvách spektra, provádíme achromatickou korekci pro úhel α_2 .

První derivace α_2 podle λ se musí rovnat nule.

Platí, že derivace $\alpha'_2 = \frac{r_1 a'_{12}}{a_{12}^2} = 0$ pro $a'_{12} = 0$.

Vratme se nyní k Huygensovu okuláru, který je popsán maticí pro dublet /3.1/. Vidíme, že člen a_{12} v /3.1/ závisí na q a q' a proto splnění $a'_{12} = 0$ je poněkud náročnější na výpočet.

Uvědomíme-li si, že pro dublet ve vzduchu je $f' = -f$, neboli podle /2.9/ a /2.10/ je $-1/a_{21} = a_{12}'$,

derivací dostaneme

$$a'_{12} = \frac{a'_{21}}{a_{21}^2}$$

Protože $a_{21} \neq 0$, můžeme podmítku $a'_{12} = 0$ nahradit podmírkou $a'_{21} = 0$, což je z hlediska výpočtu výhodnější, protože člen a_{21} má mnohem jednodušší tvar.

Z /3.1/ máme:

$$a_{21} = d/f'_1 f'_2$$

Je-li e vzdálenost mezi čočkami, pak lze d vyjádřit ve tvaru:

$$d = e - f'_1 - f'_2 \quad /viz\ obr.\ 3.11/.$$

Obdržíme:

$$a_{21} = e - f'_1 - f'_2 /f'_1 f'_2 \quad /3.13/$$

Zavedeme-li veličinu $u = f'_2/f'_1$, která je nezávislá na λ , do /3.13/, získáme:

$$\begin{aligned} a_{21} &= 1/u (e/f'_1^2 - 1/f'_1 - u/f'_1) = \\ &= 1/u [e/f'_1^2 - (1+u)/f'_1] \end{aligned}$$

Odtud derivací je:

$$a'_{21} = 1/u \left(\frac{-2ef'_1}{f'_1^4} + \frac{1+u}{f'_1^2} \right) = 0$$

Po úpravě dostaneme podmítku achromazie:

$$e = \frac{1}{2} (f'_1 + f'_2) \quad /3.14/$$

Je-li vztah /3.14/ splněn pro střední vlnovou délku

$$\lambda = \frac{\lambda_C + \lambda_F}{2}, \text{ která leží v oblasti maximální citli-$$

vosti oka, můžeme říci, že Huygensův okulár je achromatický.

Pro ohniskovou vzdálenost podle /3.2/ dosazením za e máme:

$$f' = 2f'_1 f'_2 / f'_1 + f'_2$$

Protože se okulár skládá ze 2 plankovexních čoček, musí být $f'_1 > 0$ a $f'_2 > 0$.

Pro vzdálenost d dosazením achromatické podmínky máme:

$$d = e - f'_1 - f'_2 = -\frac{1}{2} (f'_1 + f'_2) \quad /3.15-$$

Odtud je vidět, že d je vždy záporné.

Dosadíme-li /3.15/ do /3.3/ a /3.5/ dostaneme pro vzdálenost F (F') okuláru od F₁ (F'₂) ve tvaru:

$$q'_F = -2f'_2 / f'_1 + f'_2 \quad \text{a} \quad q_F = 2f'_1^2 / f'_1 + f'_2$$

Obvykle je $f'_1 > f'_2$, což lze psát jako $f'_1 = kf'_2$, kde $k > 1$.

Pak pro q'_F, a q_F platí:

$$|q'_F| = \frac{2f'_2^2}{f'_1 + f'_2} = \frac{2f'_2^2}{k+1 f'_2} = \frac{2}{k+1} f'_2$$

$$|q_F| = \frac{2f'_1^2}{f'_1 + f'_1/k} = \frac{2k}{k+1} f'_1$$

neboť je $k > 1$, je $|q'_F| < f'_2$ a $|q_F| > f'_1$.

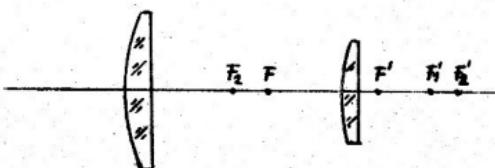
To znamená, že F' okuláru leží za oční čočkou a F uvnitř mezi kolektivem a oční čočkou.

Okuláry konstruované Huygensem měly ohniskovou vzdálenost f'_1 , vzdálenost e a ohniskovou vzdálenost f'_2 v poměru 4:3:2.

Dnes se konstruují v poměru 3:2:1.

Stavba Huygenvova okuláru je patrná z obr. [3.5]

Obr. [3.5]



4. Závěr

Tato diplomová práce ukazuje, že Gaussovou optiku lze snadno popsat pomocí maticového aparátu. Některé často užívané vztahy Gaussova prostoru pro optické soustavy zde byly odvozeny.

Jde v podstatě o součiny jednoduchých matic o 2 řádcích a 2 sloupcích.

Klasický zákon $1/p' - 1/p = 1/f'$ je jednoduchý při aplikaci na 2 nebo více čoček v kombinaci. Obtížné je již odvození vztahů pro tlustou čočku.

Naproti tomu je kontrastně jednoduché odvození matice pro lom a pro chod homogenním prostředím.

Ostatní maticové vztahy pak následují rychle a přirozeně.

Poznamenejme, že v maticové reprezentaci Gaussova prostoru by snad bylo vhodné se odchýlit od znaménkové dohody klasické geometrické optiky a uvažovat všechny vzdálenosti kladné.

Tím bychom se vyhli chybám ve znaménkách, které jsou příliš snadno dělány, zvláště když některé maticové členy musí mít opačné znaménko, než je pořadí fyzikálních elementů v obrázcích.

Seznam použité literatury

1. Fuka, J., Havelka, B.: Optika, SPN, Praha, 1961
2. Keprt, E.: Teorie optických přístrojů I. Teorie a konstrukce dalekohledu., SPN, Praha, 1965
3. Keprt, E.: Teorie optických přístrojů II. Teorie a konstrukce mikroskopu., SPN, Praha, 1966
4. Havelka, B.: Geometrická optika I. ČSAV, Praha, 1955
5. Klaus Halbach: Matrix Representation of Gaussian Optics. American Journal of Physics, **32**, 90, 1964
6. Paul I. Richards: Conventions in Matrix Optics. American Journal of Physics, **32**, 890, 1964

Obsah

	str.
0. Úvod	3
1. Klasický způsob řešení optických soustav v paraxiálním prostoru	5
1.1 Zobrazování kulovou plochou	5
1.2 Zobrazení centrovanou soustavou j kulových ploch	7
1.2.1 Zvětšení	8
1.2.2 Základní body optické soustavy	13
1.2.3 Ohniskové vzdálenosti optické soustavy	14
1.2.4 Zobrazovací rovnice	15
1.2.5 Tlustá čočka	17
1.2.6 Zobrazení soustavou dvou čoček	19
2. Maticová reprezentace Gaussova prostoru	22
2.1 Chod paprsku homogenním prostředím	23
2.2 Lom paprsku na rozhraní různých prostředí	24
2.3 Chod paprsku optickou soustavou o j kulových plochách	25
2.3.1 Tlustá čočka	33
2.3.2 Sledování chodu paprsku optickou soustavou maticí vztázenou na ohniska	38
2.3.3 Afokální soustava	41
2.3.4 Zrcadla ve spojení s optickou soustavou	44

	str.
2.3.5 Poznámka k mimoběžným paprskům	46
3. Aplikace maticové reprezentace	48
3.1 Dublet	48
3.2 Kombinace teleskopické soustavy se soustavou s ohnisky v konečné vzdá- lenosti	51
3.3 Jednoduchá soustava s proměnnou ohniskovou vzdáleností /transfokátor/	53
3.4 Huygensův okulár	56
4. Závěr	62
Seznam použité literatury	63